Algebra di Boole

L'algebra della logica (3.1-3.9)

Introduzione: postulati e teoremi
Algebre di Boole a due valori
Funzioni logiche
Formule canoniche e manipolazione di espressioni logiche
Porte e reti combinatorie
Altre porte logiche: NAND, NOR e XOR

Algebra della logica

- George Boole
  - Matematico inglese (1815-1864)
- Algebra della logica, o booleana
  - Sistema matematico formale utile per modellare processi logici, relazioni tra insiemi, ecc.
  - Come tutte le algebre, richiede alcune cose
    - Un insieme di elementi e di operazioni
    - Un gruppo di postulati, coerenti e indipendenti
    - Regole di deduzione per dimostrare i teoremi
      - È un passaggio molto delicato, quando si pretende di formalizzare un processo logico!

Regole di deduzione (1)

- Si usa il metodo deduttivo universalmente accettato in matematica
  - Si parte da alcune espressioni accettate come evidenti, senza dimostrazione
    - Detti postulati o assiomi
  - Si costruiscono nuove espressioni valide partendo dai postulati e creando una successione di espressioni legate da relazioni di eguaglianza
    - Sono i teoremi
    - La relazione di eguaglianza gode delle tre proprietà
      - Riflessiva: una espressione è eguale a se stessa
      - Simmetrica: se una espressione è eguale a una seconda espressione, anche la seconda è eguale alla prima
      - Transitiva: due espressioni eguali a una terza sono eguali tra loro

Regole di deduzione (2)

- Requisiti di una buona scelta di postulati
  - Coerenza
    - Usando le regole di deduzione non si arriva in nessun caso a contraddire nessuno dei postulati
    - La mancanza di coerenza inficia completamente un sistema logico-matematico
  - Indipendenza
    - Nessuno dei postulati può essere dedotto dall’insieme dei rimanenti
    - La mancanza di indipendenza evidenzia una ridondanza nella scelta dei postulati ma non intacca la validità della costruzione logica.

Postulati di Huntington (1)

- Siano dati l'insieme *B* e le operazioni ($\vee$) e ($\wedge$); assumiamo i seguenti 6 postulati
- P1. chiusura: $\forall\ x, y \in B$
  - *(a)* $x \vee y \in B$
  - *(b)* $x \wedge y \in B$
- P2. esistenza degli elementi neutri: $\forall\ x \in B$
  - *(a)* $x \vee 0 = 0 \vee x = x$
  - *(b)* $x \wedge 1 = 1 \wedge x = x$
- P3. commutatività: $\forall\ x, y \in B$
  - *(a)* $x \wedge y = y \wedge x$
  - *(b)* $x \vee y = y \vee x$

Postulati di Huntington (2)

- P4. distributività reciproca: $\forall\ x, y, z \in B$
  - (a) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
  - (b) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
- P5. esistenza del complemento $\overline{x}$: $\forall\ x \in B$
  - (a) $x \vee \overline{x} = 1$
  - (b) $x \wedge \overline{x} = 0$
- P6. esistenza di almeno due elementi distinti
  - $\exists\ x, y \in B: x \neq y$

Principio di dualità

- Perfetta reciprocità tra le operazioni
  - Ogni postulato consiste di 2 espressioni *(a)* e *(b)* tali che ciascuna può essere ottenuta dall'altra con le seguenti sostituzioni
    - $\vee$ con $\wedge$ e viceversa
    - 0 con 1 e viceversa
- Conseguenza
  - Da ogni eguaglianza se ne può ottenere una nuova duale, altrettanto valida, con una semplice operazione di scambio in entrambi i termini
    - Si scambiano reciprocamente $\vee$ con $\wedge$
    - Si esegue lo stesso scambio tra 0 e 1

Osservazione

- Genericità degli elementi
  - Nella definizione dell'algebra di Boole gli elementi dell'insieme *B* non sono specificati
    - Ci sono almeno 2 valori costanti
      - Ma possono essere anche di più
      - Si dimostra che sono comunque una potenza del 2
    - Le lettere usate indicano variabili che possono assumere un valore arbitrario
- Genericità delle operazioni
  - Anche delle operazioni $\vee$ e $\wedge$ non si dice altro se non le proprietà che devono soddisfare
- Esistono molte algebre di Boole

Esempi di *B*

- Esempi di insiemi per un’algebra di Boole
  - {0, 1}; {falso, vero}; {F, T}; {basso, alto}; {L, H}
  - {chiuso, aperto}, {on, off}
  - {a, b, c, …, h}
  - $\{0, 1\}^n$
- Il caso di insiemi con 2 soli elementi
  - Algebre a due valori
  - Algebre commutanti (switching logic)
    - Sono quelli per noi di maggiore interesse

Esempi di operazioni

- Esempio di operazioni che possono soddisfare le proprietà dell’algebra di Boole
  - $\{\vee, \wedge, \overline{\ }\}$ {OR, AND, NOT}, {|, &, '}
  - {somma logica, prodotto logico, complemento}
  - {parallelo, serie, commutato}, {parallel, series, toggle}
    - Si applica alle logiche switching
      - Reti telefoniche “tradizionali”

Precedenza tra operazioni (1)

- In modo convenzionale, per chiarezza e comodità, si definiscono regole di precedenza tra operatori
  - Le regole sono arbitrarie; occorre prestare attenzione a quelle definite nell’algebra a cui facciamo riferimento
    - In assenza di indicazioni, potrebbe essere sensato eseguire le operazioni nell’ordine in cui si incontrano
    - In occidente, da SX a DX
  - Le regole possono sempre essere aggirate con l’uso delle parentesi
    - L’espressione racchiusa tra () viene sempre considerata una entità unica nelle operazioni esterne

Precedenza tra operazioni (2)

- Notazioni usate
  - Per la or (somma logica): + al posto di $\vee$
  - Per la and (prodotto logico): nulla
    - Si accostano i termini senza alcun simbolo frapposto
- Priorità
  - 1: complemento
  - 2: prodotto logico
  - 3: somma logica
- Motivazione “culturale”: similitudine alle regole di precedenza di altri sistemi algebrici
- Le espressioni non sono più “simmetriche"
  - Per costruire espressioni duali usare le parentesi

Precedenza tra operazioni (3)

- Esempio:

$$a + \overline{bc} + de + f\,\overline{gh} =$$

$$= a + \overline{(bc)} + (de) + f\,\overline{(gh)} =$$

$$= a + \overline{(bc)} + (de) + f\,\overline{(gh)} =$$

$$= (a + \overline{(bc)}) + (de) + (f\,\overline{(gh)}) =$$

$$= ((a + \overline{(bc)}) + (de)) + (f\,\overline{(gh)})=$$

$$= (((a + \overline{(bc)}) + (de)) + (f\,\overline{(gh)}))$$

Teoremi (1)

- 1. Unicità del complemento
  - $\forall\, x \in B \quad \exists!\, \overline{x}$ secondo P5
- 2. Elemento neutro nell'altra operazione
  - (*a*) $x + 1 = 1$
  - (*b*) $x\, 0 = 0$
- 3. Complementarità degli elementi neutri
  - (*a*) $\overline{0} = 1$
  - (*b*) $\overline{1} = 0$

Teoremi (2)

- 4. Idempotenza
  - (a) $x + x = x$
  - (b) $xx = x$
- 5. Involuzione
  - $\overline{\overline{x}} = x$
- 6. Assorbimento
  - (a) $x + xy = x$
  - (b) $x(x + y) = x$

Teoremi (3)

- 7. Somma con il complemento
  - (a) $x + \overline{x}y = x + y$
  - (b) $x(\overline{x} + y) = xy$
- 8. Associatività
  - (a) $x + y + z = x + (y + z)$
  - (b) $xyz = x(yz)$
- 9. Legge di De Morgan
  - (a) $\overline{x + y} = \overline{x}\,\overline{y}$
  - (b) $\overline{xy} = \overline{x} + \overline{y}$

Generalizzazione

- La proprietà associativa e la legge di De Morgan possono essere generalizzate
  - In una somma di un qualsiasi numero di elementi il risultato è indipendente dall'ordine con cui sono considerati i singoli elementi
  - Il complemento di una somma di un qualsiasi numero di termini è eguale al prodotto dei complementi degli stessi termini
  - Valgono ovviamente le proposizioni duali

T1. Unicità del complemento

- Ho due elementi $\overline{x}$ e z che godono secondo P5 della proprietà di essere complemento di x
  - $\overline{x} = \overline{x}\,1$ P2(*b*) elemento neutro
  - $= \overline{x}\,(x + z)$ sostituzione P5(*a*)
  - $= \overline{x}x + \overline{x}z$ P4(*b*) distributiva
  - $= x\overline{x} + \overline{x}z$ P3(*b*) commutativa
  - $= 0 + \overline{x}z$ sostituzione P5(*b*)
  - $= xz + \overline{x}z$ sostituzione P5(*b*)
  - $= zx + z\overline{x}$ P3(*b*) commutativa
  - $= z(x + \overline{x})$ P4(*b*) distributiva
  - $= z\,1$ sostituzione P5(*a*)
  - $= z$ P2(*b*) elemento neutro
  - q.d.e.

T2. Elemento neutro nell'altra operazione

- Ho due elementi $\bar{x}$ e z che godono secondo P5 della proprietà di essere complemento di x
  - $x + 1 = 1(x + 1)$ — P2(b) elemento neutro
  - $= (x + \bar{x})(x + 1)$ — P5(a) definizione complemento
  - $= x + \bar{x}\,1$ — P4(a) distributiva
  - $= x + \bar{x}$ — P2(b) elemento neutro
  - $= 1$ — P5(a) definizione complemento
- La parte (b) segue per dualità
  - $x\,0 = 0 + x\,0$ — P2(a) elemento neutro
  - $= x\bar{x} + x\,0$ — P5(b) definizione complemento
  - $= x\,(\bar{x} + 0)$ — P4(b) distributiva
  - $= x\bar{x}$ — P2(a) elemento neutro
  - $= 0$ — P5(b) definizione complemento
  - **q.d.e.**

T3. Complementarità degli elementi neutri

- Usiamo il seguente argomento
  - Da T1 (unicità dell'elemento neutro) segue che
    - $\exists!\ \overline{0}$ complemento di 0
  - Inoltre da P2(*a*) (definizione di elemento neutro)
    - $0 + \overline{0} = \overline{0}$
  - Ma è anche da P5(*a*) (definizione di complemento)
    - $0 + \overline{0} = 1$
  - Quindi, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza
    - $\overline{0} = 1$
  - La parte (*b*) segue per dualità
    - $\overline{1} = 0$
    - **q.d.e.**

T4. Idempotenza

- Si ha, $\forall\, x \in B$,
  - $x + x = (x + x)\,1$ P2(*b*) elemento neutro
  - $= (x + x)(x + \bar{x})$ P5(*a*) definizione complemento
  - $= x + x\bar{x}$ P4(*a*) distributiva
  - $= x + 0$ P5(*b*) definizione complemento
  - $= x$ P2(*a*) elemento neutro
- La parte (*b*) segue per dualità
  - $xx = x$
  - q.d.e.

T5. Involuzione

- Si ha, $\forall\, x \in B$,
  - $\bar{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} + 0$ P2(*a*) elemento neutro
  - $= \bar{\bar{x}} + x\bar{x}$ P5(*a*) definizione complemento
  - $= (\bar{\bar{x}} + x)(\bar{\bar{x}} + \bar{x})$ P4(*a*) distributiva
  - $= (x + \bar{\bar{x}})(\bar{x} + \bar{\bar{x}})$ P3(*a*) commutativa
  - $= (x + \bar{\bar{x}})\, 1$ P5(*a*) definizione complemento
  - $= (x + \bar{\bar{x}})(x + \bar{x})$ P5(*a*) definizione complemento
  - $= x + \bar{\bar{x}}\bar{x}$ P4(*a*) distributiva
  - $= x + \bar{x}\bar{\bar{x}}$ P3(*b*) commutativa
  - $= x + 0$ P5(*b*) definizione complemento
  - $= x$ P2(*a*) elemento neutro
  - q.d.e.

T6. Assorbimento

- Si ha $\forall\, x, y \in B$
  - $x + xy = x\,1 + xy$ P2(b) elemento neutro
  - $= x(1 + y)$ P4(b) distributiva
  - $= x(y + 1)$ P3(a) commutativa
  - $= x\,1$ T2(a) prop. elem. neutro
  - $= x$ P2(b) elemento neutro
- La parte (b) segue per dualità
  - $x(x + y) = x$
  - q.d.e.

T7. Somma con il complemento

- Si ha $\forall\, x, y \in B$
  - $x + \bar{x}y = (x + \bar{x})(x + y)$ P4(*a*) distributiva
  - $= 1\,(x + y)$ P5(*a*) definizione complemento
  - $= (x + y)\,1$ P3(*b*) commutativa
  - $= x + y$ P2(*b*) elemento neutro
- La parte (*b*) segue per dualità
  - $x(\bar{x} + y) = xy$
  - **q.d.e.**

T8. Associatività (1)

- $\forall\ x, y, z \in B$ si abbia
  - $A = x + (y + z)$ e $C = x + y + z$
  - Lemma 1
    - $xA = x[x + (y + z)]$
    - $\quad = x$ T6(b) assorbimento
    - $xC = x(x + y + z)$
    - $\quad = x(x + y) + xz$ P4(*b*) distributiva
    - $\quad = x + xz$ T6(*b*) assorbimento
    - $\quad = x$ T6(*a*) assorbimento
  - Quindi $xA = xC$ per la proprietà transitiva

T8. Associatività (2)

- Lemma 2
  - $\bar{x}A = \bar{x}[x + (y + z)]$
  - $= \bar{x}x + \bar{x}(y + z)$ P4(b) distributiva
  - $= x\bar{x} + \bar{x}(y + z)$ P3(b) commutativa
  - $= 0 + \bar{x}(y + z)$ P5(b) proprietà complemento
  - $= \bar{x}(y + z)$ P2(a) elemento neutro
  - $\bar{x}C = \bar{x}(x + y + z)$
  - $= \bar{x}(x + y) + \bar{x}z$ P4(*b*) distributiva
  - $= \bar{x}x + \bar{x}y + \bar{x}z$ P4(*b*) distributiva
  - $= x\bar{x} + \bar{x}y + \bar{x}z$ P3(*b*) commutativa
  - $= 0 + \bar{x}y + \bar{x}z$ P5(*b*) proprietà complemento
  - $= \bar{x}y + \bar{x}z$ P2(*a*) elemento neutro
  - $= \bar{x}(y + z)$ P4(*b*) distributiva
- Quindi $\bar{x}A = \bar{x}C$ per la proprietà transitiva

T8. Associatività (3)

- Per completare la dimostrazione
  - $xA + \overline{x}A = xC + \overline{x}C$ per sostituzione
  - $Ax + A\overline{x} = Cx + C\overline{x}$ P3(*b*) commutativa
  - $A(x + \overline{x}) = C(x + \overline{x})$ P4(*b*) distributiva
  - $A\ 1 = C\ 1$ P5(*a*) definizione complemento
  - $A = C$ *P2(b) elemento neutro*
  - $x + (y + z) = x + y + z$
- La parte (*b*) segue per dualità
  - $x(yz) = xyz$
  - q.d.e.

T9. Legge di De Morgan

- Si ha $\forall\, x, y \in B : \overline{x + y} = \bar{x}\,\bar{y}$
  - La legge si dimostra osservando che $(x + y)$ e $(\bar{x}\,\bar{y})$ soddisfano la definizione di complemento P5
  - Inoltre per T1 il complemento è unico
    - $x + y + \bar{x}\,\bar{y} =$
    - $= (x + y + \bar{x})(x + y + \bar{y})$ P4(*a*) distributiva
    - $= 1$ P3(*a*), T8(*a*), P5(*a*), T2(*a*), T4(*b*)
  - E anche
    - $(x + y)\,\bar{x}\,\bar{y} = \bar{x}\,\bar{y}(x + y)$ P3(b) commutativa
    - $= \bar{x}\,\bar{y}\,x + \bar{x}\,\bar{y}\,y$ P4(*b*) distributiva
    - $= 0$ P3(*b*), T8(*b*), P5(*b*), T2(*b*), T4(*a*)
  - La parte (*b*) segue per dualità
    - $\overline{xy} = \bar{x} + \bar{y}$
    - q.d.e.

Induzione perfetta

- Strumento di deduzione per algebre in cui B ha un numero n di elementi finito
  - Si voglia dimostrare la validità di una proposizione costituita dall'uguaglianza di due espressioni
    - Si usa a volte il termine di tautologia
  - Le espressioni coinvolgono complessivamente un numero finito m di variabili booleane
- Procedura
  - Si verifica l'uguaglianza delle espressioni per ogni possibile combinazione dei valori dei termini
    - Il procedimento è semplice
  - Occorrono n^m verifiche
    - Ha elevata complessità computazionale

Logica proposizionale (1)

- Esaminiamo la struttura della logica classica
  - Gli elementi su cui opera sono proposizioni
    - È una logica a 2 valori
      - *Tertium non datur*
    - L’insieme *B* è quindi {Falso, Vero}
  - Le argomentazioni logiche combinano proposizioni con le congiunzioni “e”, “o”
    - Il risultato è ancora una proposizione con un preciso valore, dipendente dal valore delle singole proposizioni componenti
  - Verifichiamo che le proprietà usuali della logica la qualificano come algebra di Boole

Le operazioni della logica

x	*y*	*x* “e” *y*	*x* “o” *y*
Falso	Falso	Falso	Falso
Falso	Vero	Falso	Vero
Vero	Falso	Falso	Vero
Vero	Vero	Vero	Vero

Logica e postulati (1)

- Osservazioni
  - L’insieme delle proposizioni è chiuso rispetto alle operazioni svolte da congiunzioni e negazione (P1)
  - Esiste l’elemento neutro (P2)
    - La congiunzione “e” ha elemento neutro Vero
    - La congiunzione “o” ha elemento neutro Falso
  - Le congiunzioni sono commutative (P3)
    - Falso “e” Vero equivale a Vero “e” Falso, cioè Falso
    - Falso “o” Vero equivale a Vero “o” Falso, cioè Vero

Distributività (a)

x	*y*	*z*	*y "o" z*	*x "e" (y "o" z)*	*x "e" y*	*x "e" z*	*(x "e" y) "o" (x "e" z)*
Falso	Falso	Falso	Falso	Falso	Falso	Falso	Falso
Falso	Falso	Vero	Vero	Falso	Falso	Falso	Falso
Falso	Vero	Falso	Vero	Falso	Falso	Falso	Falso
Falso	Vero	Vero	Vero	Falso	Falso	Falso	Falso
Vero	Falso	Falso	Falso	Falso	Falso	Falso	Falso
Vero	Falso	Vero	Vero	Vero	Falso	Vero	Vero
Vero	Vero	Falso	Vero	Vero	Vero	Falso	Vero
Vero	Vero	Vero	Vero	Vero	Vero	Vero	Vero

Distributività (b)

x	*y*	*z*	*y "e" z*	*x "o" (y "e" z)*	*x "o" y*	*x "o" z*	*(x "o" y) "e" (x "o" z)*
Falso	Falso	Falso	Falso	Falso	Falso	Falso	Falso
Falso	Falso	Vero	Falso	Falso	Falso	Vero	Falso
Falso	Vero	Falso	Falso	Falso	Vero	Falso	Falso
Falso	Vero	Vero	Vero	Vero	Vero	Vero	Vero
Vero	Falso	Falso	Falso	Vero	Vero	Vero	Vero
Vero	Falso	Vero	Falso	Vero	Vero	Vero	Vero
Vero	Vero	Falso	Falso	Vero	Vero	Vero	Vero
Vero	Vero	Vero	Vero	Vero	Vero	Vero	Vero

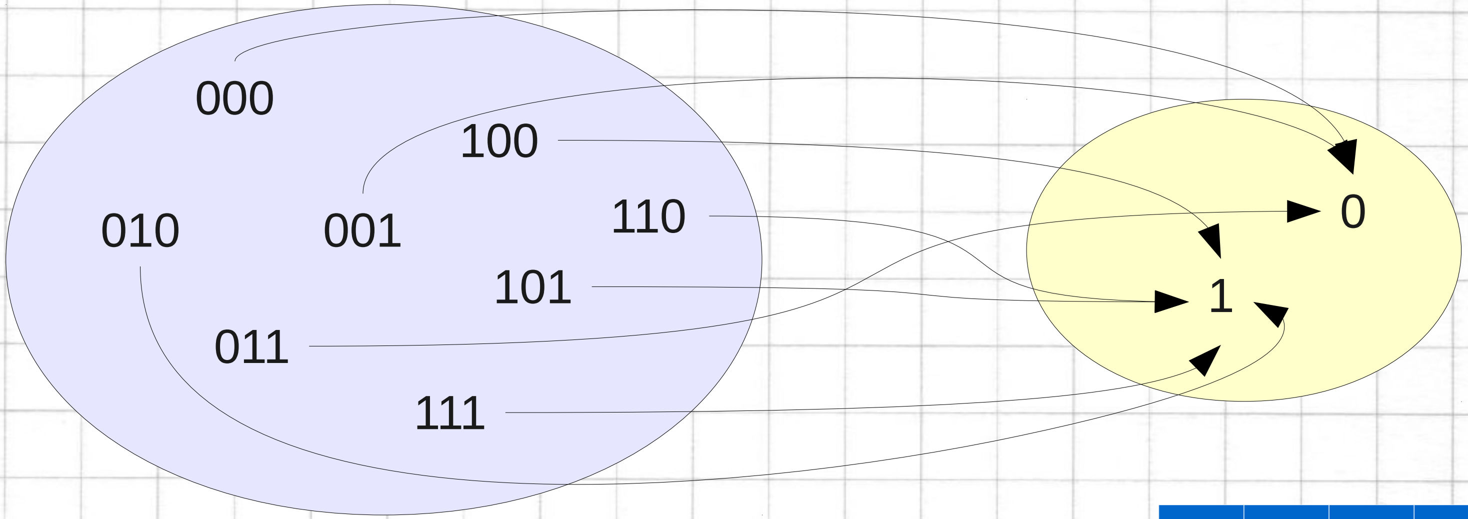
Logica e postulati (2)

- Osservazioni
  - Sono distributive (P4)
    - Lo evidenziano le tabelle (a) e (b)
  - Esiste la negazione secondo le proprietà del complemento (P5)
    - Una proposizione e la negata non possono coesistere
    - Una proposizione o la negata esauriscono le possibilità
- Conclusione: la classica logica proposizionale è un’algebra di Boole a due valori
  - Si stabilisce un isomorfismo tra le due strutture
    - Falso, Vero corrispondono a 0, 1
    - “o”, “e” corrispondono a $\vee$ e $\wedge$

Funzioni booleane complete

- Consideriamo un funzione *f* di *n* variabili
  - $f = f(x_1, x_2, ..., x_n)$
  - Applicazione da $B^n \rightarrow B$ che a ogni valore del dominio (una *n*-upla di valori booleani) associa un valore booleano e uno soltanto
- Nel caso di *B* finito può essere espressa con...
  - Grafico nella rappresentazione di Eulero-Venn
  - Espressione booleana
  - Tabella
  - ...

Rappresentazione di funzioni



$$f = x + \bar{z}y$$

x	*y*	*z*	*f*
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Tabella di verità

- Una qualsiasi funzione booleana è determinata dalla sua tabella di verità
  - Lista ordinata in cui a ogni riga è associata una diversa combinazione degli ingressi
    - Le righe sono 2^n
    - Le righe possono essere individuate dal numero naturale binario le cui cifre corrispondono ai valori logici degli ingressi
    - Non è necessario indicarle esplicitamente
  - Le colonne sono $n + 1$
    - Si riducono a 1
      - L'unica colonna col valore della funzione
  - Esistono 2^{2^n} diverse funzioni a n ingressi

Forme normali

- Letterali
  - Ciascuna occorrenza di una variabile, affermata o negata, in una espressione booleana
- Termine prodotto
  - Singolo letterale o prodotto di letterali
- Forma somma di prodotti (SP)
  - Espressione booleana costituita da un singolo termine prodotto o da una somma di essi
- In modo duale si costruisce la forma prodotto di somme (PS)

Forme canoniche

- Dalla tabella di verità all'espressione logica
  - L'espressione logica è un passaggio verso la realizzazione elettronica
  - Le espressioni logiche si possono manipolare con i teoremi in modo da apportare semplificazioni
- Proprietà delle forme canoniche
  - Particolari forme normali (SP o PS) costruite in modo da avere termini (prodotto o somma) costituiti da tutte le variabili di ingresso
  - Sono univoche
    - Due funzioni equivalenti hanno le stesse forme canoniche

I mintermini

- Termini prodotto costituiti da tutte le variabili di ingresso, nelle possibili combinazioni affermate o negate
  - Un mintermine è vero per una, e una soltanto, combinazione degli ingressi
    - Per esempio xyz vale 1 solo per l'ingresso 111, mentre il mintermine che vale 1 per la combinazione 100 è $x\,\overline{y}\,\overline{z}$
  - La forma canonica SP è una **forma normale SP costituita solo da mintermini**
    - Dovrà essere presente un mintermine in corrispondenza di ciascuna riga a 1 della tabella di verità

La notazione *m*

- Un mintermine può essere individuato con il numero corrispondente alla riga della tabella di verità per cui è vero
  - Per esempio
    - $\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$ si individua con m_0
    - $\bar{x}\,y\,\bar{z}$ con m_2
    - xyz con m_7
  - La forma canonica si scrive come sommatoria dei mintermini m_i per cui la funzione è vera
  - Per esempio
    - $f = \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} + \bar{x}\,y\,\bar{z} + xyz = m_0 + m_2 + m_7$
    - Generalizzando $f = \sum m(0,2,7)$

I Maxtermini

- Termini somma costituiti da tutte le variabili di ingresso, nelle possibili combinazioni affermate o negate
  - Un Maxtermine è falso per una, e una soltanto, combinazione degli ingressi
    - Per esempio ($x + y + z$) vale 0 solo per l'ingresso 000, mentre il Maxtermine che vale 0 per la combinazione 011 è ($x + \bar{y} + \bar{z}$)
  - La forma canonica PS è una **forma normale PS costituita solo da Maxtermini**
    - Dovrà essere presente un Maxtermine in corrispondenza di ciascuna riga a 0 della tabella di verità

La notazione *M*

- Un Maxtermine può essere individuato con il numero corrispondente alla riga della tabella di verità per cui è falso
  - Per esempio
    - $(x + y + \bar{z})$ si individua con M_1, $(x + \bar{y} + \bar{z})$ con M_3, $(\bar{x} + y + z)$ con M_4, $(\bar{x} + y + \bar{z})$ *con* M_5, $(\bar{x} + \bar{y} + z)$ *con* M_6
  - La forma canonica si scrive come produttoria dei Maxtermini M_i per cui la funzione è falsa
  - Per esempio
    - $f = (x + y + \bar{z})(x + \bar{y} + \bar{z})(\bar{x} + y + z)(\bar{x} + y + \bar{z})(\bar{x} + \bar{y} + z) = M_1 M_3 M_4 M_5 M_6$
    - Generalizzando $f = \prod M(1,3,4,5,6)$

Manipolazione di espressioni (1)

- Espansione secondo Shannon
  - (a) $f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n) =$

    $= \overline{x}_i \, f(x_1, x_2, ..., 0, ..., x_n) + x_i \, f(x_1, x_2, ..., 1, ..., x_n)$
  - (b) $f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n) =$

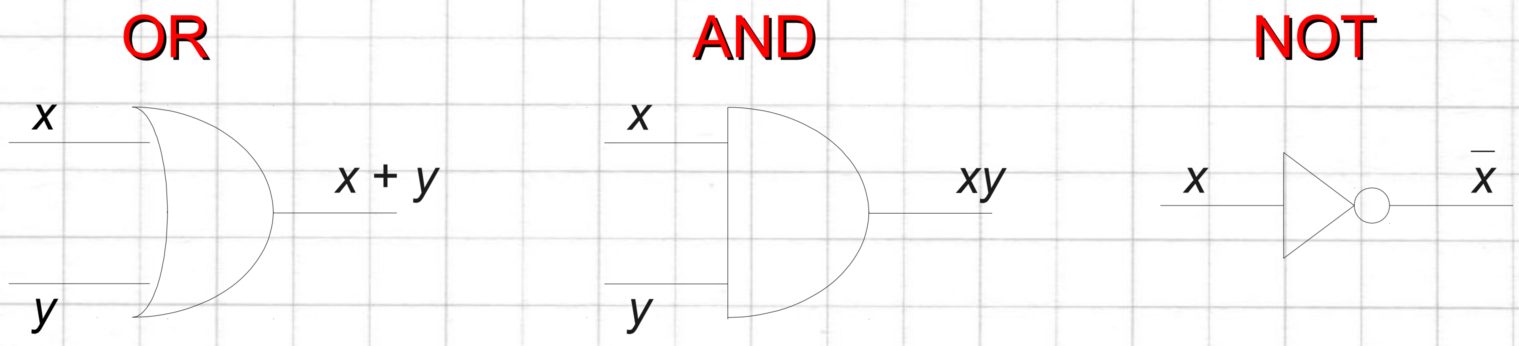
    $= [\overline{x}_i + f(x_1, x_2, ..., 1, ..., x_n)][x_i + f(x_1, x_2, ..., 0, ..., x_n)]$
  - L'espansione...
    - Evidenzia l'effetto di una particolare variabile, che viene eliminata dall'espressione
    - Può essere ripetuta ricorsivamente su tutte le variabili arrivando alla forma canonica

Manipolazione di espressioni (2)

- Riduzione secondo Shannon
  - (*a*) $x_i\, f(x_1, ..., x_i, ..., x_n) = x_i\, f(x_1, ..., 1, ..., x_n)$
  - (*b*) $x_i + f(x_1, ..., x_i, ..., x_n) = x_i + f(x_1, ..., 0, ..., x_n)$
- E similmente
  - (*a*) $\overline{x}_i\, f(x_1, ..., x_i, ..., x_n) = \overline{x}_i\, f(x_1, ..., 0, ..., x_n)$
  - (*b*) $\overline{x}_i + f(x_1, ..., x_i, ..., x_n) = \overline{x}_i + f(x_1, ..., 1, ..., x_n)$
- La riduzione...
  - Permette di semplificare rapidamente espressioni ottenute come somma (o prodotto) di una singola variabile per altri termini che contengono la variabile stessa.

Porte logiche

- In algebre a due valori
  - Associati a grandezze elettriche {VL, VH}
- Sono circuiti elettronici che si comportano secondo le proprietà delle operazioni logiche
  - Chiamiamo questi circuiti “porte logiche elementari” OR, AND e NOT



Reti logiche combinatorie

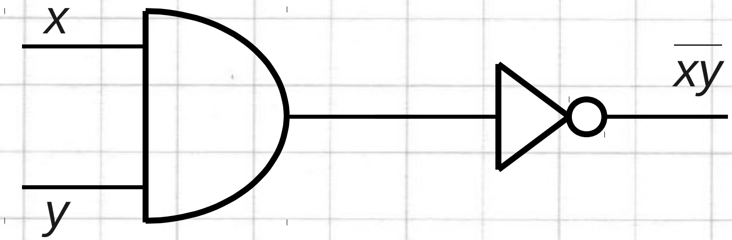
- Schema grafico
  - Composto da porte logiche interconnesse
  - Realizza o implementa una funzione logica
  - Si definisce combinatoria se l'uscita è completamente determinata dagli ingressi
    - Condizione sufficiente è l'assenza di loop ingresso/uscita
      - Si definiscono reti acicliche
  - Reti in cui l'uscita dipende dai valori precedenti si definiscono sequenziali
  - L'analisi di una rete logica consiste ne''identificare l'espressione che implementa
  - La sintesi esegue il processo inverso
    - Dall'espressione allo schema a porte logiche

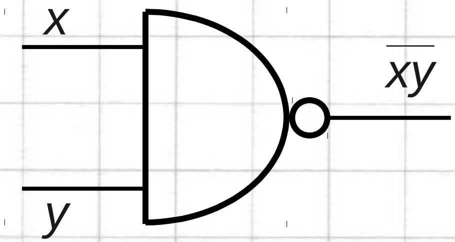
Condizione *don't care*

- Gli ingressi non specificati
  - Non fisicamente possibili
  - Ingressi per cui non interessa conoscere il comportamento della rete
- Descrizione di funzioni incomplete
  - Nella tabella di verità si indicano con -
  - Nelle forme canoniche si elencano le combinazioni *don't care*
- In uno schema logico non esistono condizioni non specificate
  - La rete calcola sempre un uscita 0 o 1
  - Nella sintesi questo aumenta i gradi di libertà

Una nuova porta logica

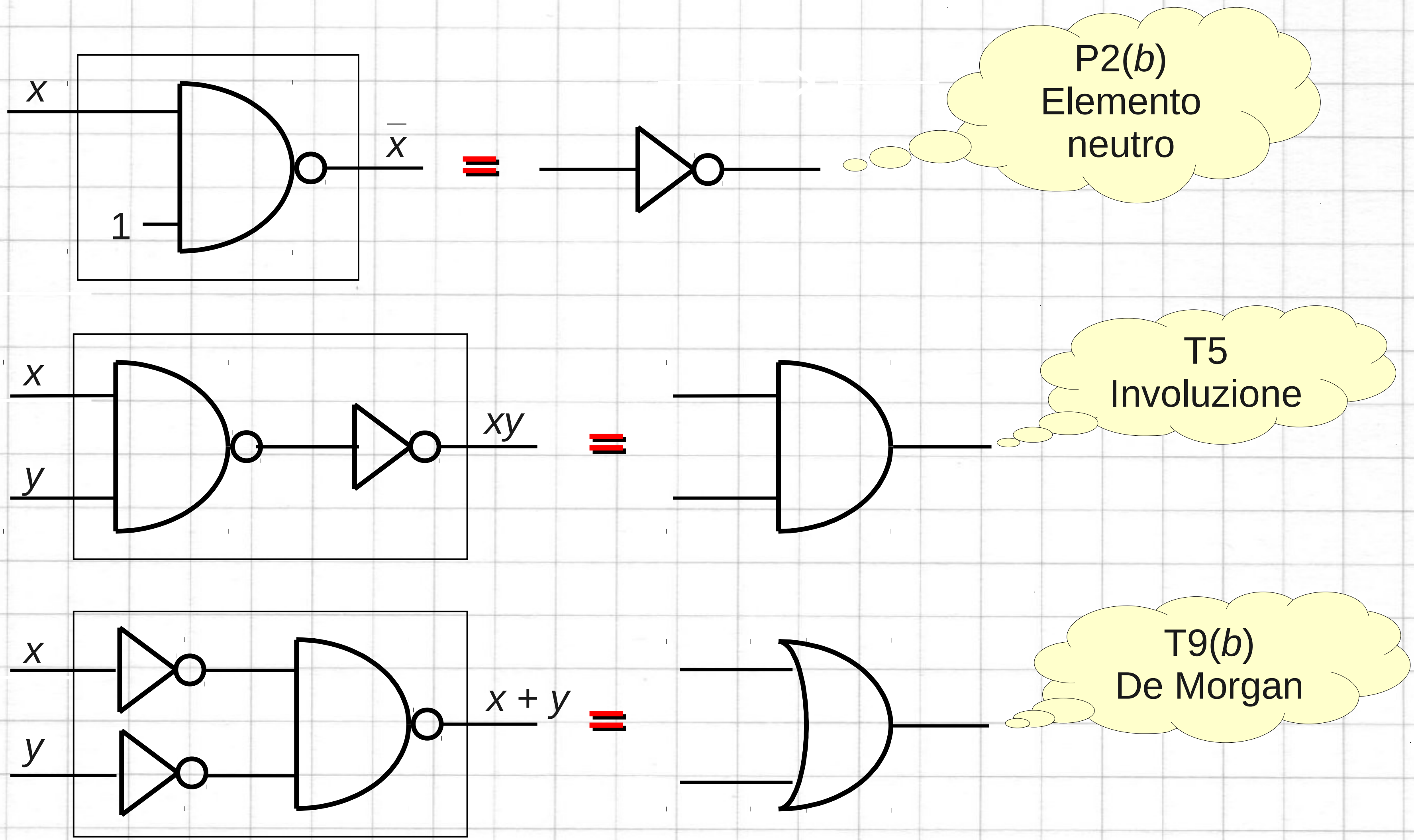
- Possiamo definire una nuova porta
  - Il prodotto logico negato o porta NAND





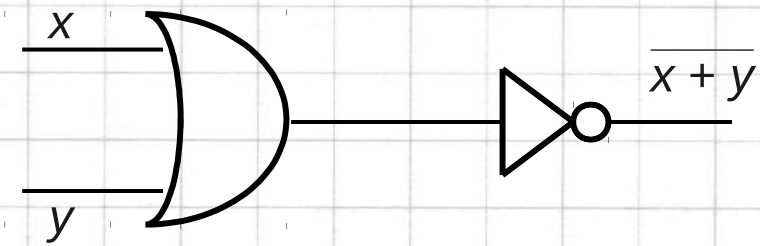
NAND porta universale

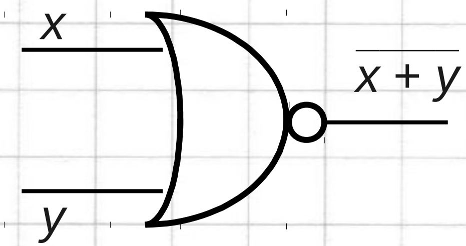
- Si può usare per realizzare tutte le altre porte



La porta NOR

- Si definisce in modo duale
  - Somma logica negata o porta NOR
  - È anch'essa una porta universale
  - Somma logica negata o porta NOR





Forma NAND-NAND (NOR-NOR)

- E possibile realizzare funzioni facendo uso solo di uno stesso tipo di porta universale
  - Sostituendo a ogni porta la sua equivalente realizzata con porte NAND (NOR)
  - Oppure applicando involuzione e legge di De Morgan ricorsivamente
    - In particolare la forma SP applicando T5 e T9(*a*) si trasforma in una forma NAND-NAND

$$f = xy + \overline{x}\,zt + \overline{y}\,t = \overline{(\overline{xy})(\overline{\overline{x}\,zt})(\overline{\overline{y}\,t})}$$

La porta XOR (e XNOR)

- Definizione
  - $x \oplus y = x\overline{y} + \overline{x}y = (x + y)(\overline{x} + \overline{y})$
- Proprietà notevoli della XOR
  - $x \oplus 0 = x$ elemento neutro
  - $x \oplus 1 = \overline{x}$ invertitore comandato
  - $x \oplus x = 0$; $x \oplus \overline{x} = 1$
  - $x \oplus y = y \oplus x$ commutativa
  - $x \oplus (y \oplus z) = x \oplus y \oplus z$ associativa
  - $x(y \oplus z) = xy \oplus xz$ prodotto distributivo
  - $x + y = x \oplus y \oplus xy$
  - $x \oplus y = z \Rightarrow y \oplus z = x$; $x \oplus z = y$