

Sintesi di reti combinatorie

Criteri e procedure di sintesi (4.1-4.7)

Introduzione: formulazione e parametri di valutazione

Implicanti principali e coperture irridondanti

Mappe di Karnaugh: procedura grafica di sintesi ottima

Mappe a 5 e 6 variabili

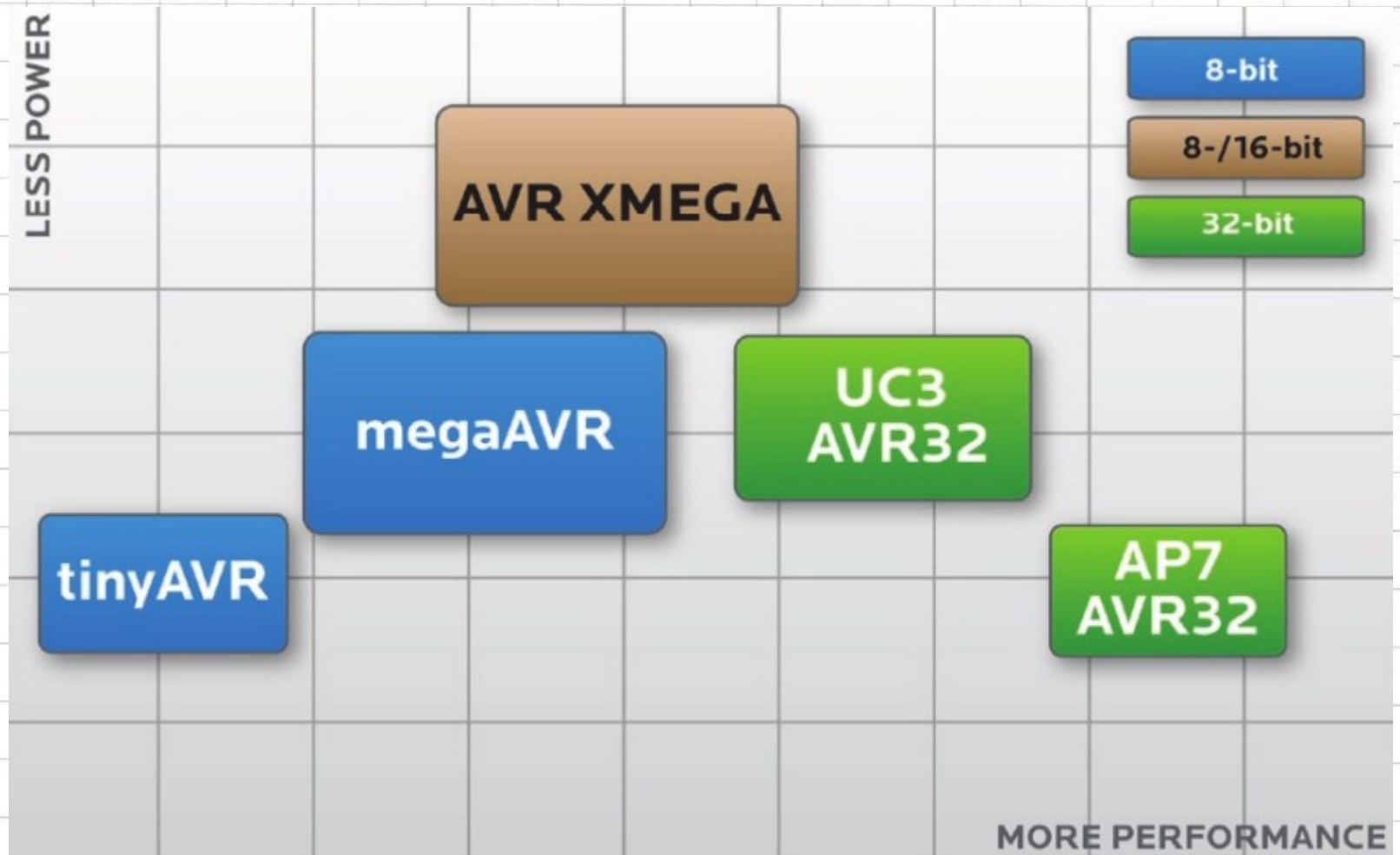
Sintesi ottime di reti combinatorie incomplete

Cenno alla sintesi di reti combinatorie con più uscite

Prestazioni di una rete logica

- Parametri per la **misura** di prestazione
 - Tempo di esecuzione, potenza di elaborazione
 - Consumo di potenza
 - Ingombro, costo
 - Affidabilità
- La soluzione è sempre un **compromesso**
 - Il peso di un parametro dipende dall'applicazione
- Spazio di progetto
 - Dominio di tutte le possibilità
 - Spesso rappresentato come spazio cartesiano 2D o 3D, in cui le realizzazioni fisiche sono individuate da punti o aree in funzione di 2 o 3 parametri di prestazione

Spazio prestazioni/consumo



Formulazione del problema

- Selezione dei criteri di interesse
 - Velocità ragionevole della rete combinatoria
 - Dipende dai **livelli di logica** tra ingresso e uscita
 - Le forme normali hanno **due** livelli di logica
 - Costo, ingombro
- Formalizzazione di un funzionale di costo
 - Espressione analitica legata ai parametri che si vogliono ottimizzare
 - La sua valutazione dà uno scalare che rappresenta il costo
- Manipolazione delle espressioni logiche per minimizzare il “costo”
 - Considerando una implementazione diretta dell'espressione logica

Il criterio di ottimo (1)

- Minimo numero di letterali in forme normali
 - La scelta della forma normale pone un vincolo sul tempo di ritardo della rete
 - Dell'ordine di due porte in cascata
 - Il numero di letterali è legato al costo effettivo dei componenti
 - Il numero di letterali di una espressione esprime il **numero complessivo di ingressi** delle porte che la implementano
 - La dimensione di una porta dipende dal numero di ingressi
 - Il numero di porte della rete è invece legato al numero di termini della forma normale
 - $NP = NT - NT1 + 1$ per $NT > 1$
 - NP : numero di porte
 - NT : numero di termini
 - $NT1$: numero di termini con un solo elemento

Il criterio di ottimo (2)

➤ Vantaggi

- Ragionevolmente legato al **costo effettivo**
- **Semplicità** della definizione
- Possibilità di individuare **procedure rigorose** per minimizzare il costo secondo il numero di letterali

➤ Limiti

- **È rigido** nella scelta dei due livelli di logica
- **Trascura** numerosi aspetti
 - Il numero di porte
 - Il tipo di porta (AND/OR)
 - Non pesa le inversioni

Implicazione (1)

- Simbolo e definizione

- $(x \Rightarrow y) = xy + \bar{x}$

- Osservazioni

- x ipotesi e y tesi

- La verità dell'ipotesi è sufficiente per la tesi

- Un ipotesi falsa può implicare qualsiasi cosa

- Un teorema interessante

- La dimostrazione per assurdo

- $(x \Rightarrow y) = xy + \bar{x} = xy + \bar{x} 1 = xy + \bar{x}(y + \bar{y})$

- $= xy + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y} = y(x + \bar{x}) + \bar{x}\bar{y}$

- $= \bar{\bar{y}} 1 + \bar{x}\bar{y} = \bar{x}\bar{y} + \bar{\bar{y}} = (\bar{y} \Rightarrow \bar{x})$

Implicazione (2)

- Parlando di funzioni, diciamo che se
 - $(f_1 \Rightarrow f_2)$
 - f_1 implica f_2 , f_2 è implicato da f_1
 - $\bar{f}_2$ implica $\bar{f}_1$
- Riferendoci a una forma normale SP
 - Ciascun termine o combinazione di termini **implica** la funzione complessiva
- Nella forma PS invece
 - Ciascuna somma o combinazione di somme **è implicata** dalla funzione complessiva

Implicazione tra termini

- In un termine prodotto, un termine $tp1$ **include** un secondo termine $tp2$ se i letterali di quest'ultimo sono anche letterali del primo
 - Il primo termine implica il secondo: $tp1 \Rightarrow tp2$
- In un termine somma, un termine $ts1$ **include** un secondo termine $ts2$ se i letterali di quest'ultimo sono anche letterali del primo
 - Il secondo termine implica il primo: $ts2 \Rightarrow ts1$
- La proprietà di inclusione riguarda proprio il fatto che l'espressione del primo termine contiene al suo interno l'espressione del secondo

Implicanti e implicanti principali

- Definizione
 - Termine prodotto che implica la funzione
- Conseguenze
 - Tutti i termini dell'espressione di una funzione in forma normale SP sono implicanti
 - Tutti i mintermini sono implicanti
- Un implicante si dice principale se non include altri implicanti della stessa funzione

Implicati e implicati principali

- Definizione
 - Termine somma che è implicato dalla funzione
- Conseguenze
 - Tutti i termini somma dell'espressione di una funzione in forma normale PS sono implicati
 - Tutti i Maxtermini sono implicati
- Un implicato si dice principale se non include altri implicati della stessa funzione

Teorema di ottimalità

- Una forma normale SP ottima secondo il criterio del minimo numero di letterali è composta esclusivamente di implicanti principali
 - La dimostrazione è basata sul fatto che un implicante non principale ne contiene uno principale della stessa funzione, con meno letterali
 - In tutti gli ingressi per cui l'implicante non principale implica la funzione, implica anche quello principale che lo include, e tramite quest'ultimo è garantito il corretto valore a 1 della funzione complessiva

Liste di copertura irridondanti

➤ Definizione

- Forma normale SP composta da implicanti principali tali che nessuno dei termini che la compongono può essere eliminato mantenendo l'uguaglianza con la funzione
- Una forma normale SP ottima secondo il criterio del minimo numero di letterali è una lista di copertura irridondante
 - La dimostrazione, ovvia, discende dal fatto che l'eliminazione di un termine riduce il numero di letterali
 - Il termine “copertura” si riferisce al fatto che i termini “coprono” gli 1 della funzione

Il caso duale PS

- Le stesse osservazioni sull'ottimalità delle forme normali SP possono essere fatte per le forme PS, facendo riferimento agli implicati principali
- Inoltre una lista di copertura irridondante nel caso della forma PS è costituita da un elenco di implicati principali, che coprono tutti i valori 0 della funzione, nessuno dei quali può essere omissso

Mappe di Karnaugh: proprietà

- Forma tabellare di una rete in cui ogni cella corrisponde a una combinazione degli ingressi
 - Le celle sono 2^n
 - Si attua un indirizzamento n -dimensionale
 - Gli “1” della funzione sono i mintermini
- Celle adiacenti sono caratterizzate dalla variazione di valore di un solo ingresso
 - Facile determinare gli implicant della funzione
 - Due mintermini adiacenti fondono e danno origine a un implicante di ordine 1 che entrambi includono
 - Due implicant di ordine 1 adiacenti danno origine a un implicante di ordine 2 (4 celle a 1) che entrambi includono
 - ecc.

Mappe a 1 e 2 variabili

x	$f(x)$
0	$f(0)$
1	$f(1)$

x	
0	1
$f(0)$	$f(1)$

Mappa di Karnaugh

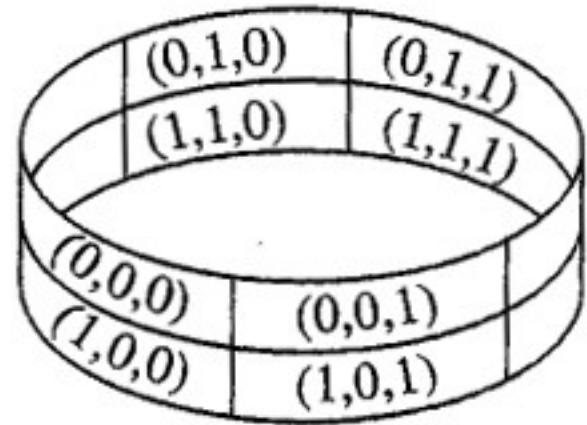
Tabella di verità

x	y	$f(x,y)$
0	0	$f(0,0)$
0	1	$f(0,1)$
1	0	$f(1,0)$
1	1	$f(1,1)$

y	
0	1
$f(0,0)$	$f(0,1)$
$f(1,0)$	$f(1,1)$

Mappe a 3 variabili

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	$f(0,0,0)$
0	0	1	$f(0,0,1)$
0	1	0	$f(0,1,0)$
0	1	1	$f(0,1,1)$
1	0	0	$f(1,0,0)$
1	0	1	$f(1,0,1)$
1	1	0	$f(1,1,0)$
1	1	1	$f(1,1,1)$



		yz			
		00	01	11	10
x	0	$f(0,0,0)$	$f(0,0,1)$	$f(0,1,1)$	$f(0,1,0)$
	1	$f(1,0,0)$	$f(1,0,1)$	$f(1,1,1)$	$f(1,1,0)$

Mappe a 3 variabili: esempio

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

		yz			
		00	01	11	10
x	0	1	0	0	1
	1	1	1	0	0

Mappe a 4 variabili

w	x	y	z	$f(w,x,y,z)$
0	0	0	0	$f(0,0,0,0)$
0	0	0	1	$f(0,0,0,1)$
0	0	1	0	$f(0,0,1,0)$
0	0	1	1	$f(0,0,1,1)$
0	1	0	0	$f(0,1,0,0)$
0	1	0	1	$f(0,1,0,1)$
0	1	1	0	$f(0,1,1,0)$
0	1	1	1	$f(0,1,1,1)$
1	0	0	0	$f(1,0,0,0)$
1	0	0	1	$f(1,0,0,1)$
1	0	1	0	$f(1,0,1,0)$
1	0	1	1	$f(1,0,1,1)$
1	1	0	0	$f(1,1,0,0)$
1	1	0	1	$f(1,1,0,1)$
1	1	1	0	$f(1,1,1,0)$
1	1	1	1	$f(1,1,1,1)$

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	$f(0,0,0,0)$	$f(0,0,0,1)$	$f(0,0,1,1)$	$f(0,0,1,0)$
	01	$f(0,1,0,0)$	$f(0,1,0,1)$	$f(0,1,1,1)$	$f(0,1,1,0)$
	11	$f(1,1,0,0)$	$f(1,1,0,1)$	$f(1,1,1,1)$	$f(1,1,1,0)$
	10	$f(1,0,0,0)$	$f(1,0,0,1)$	$f(1,0,1,1)$	$f(1,0,1,0)$

Mappe a 4 variabili: esempio

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	1	1	0	1
	01	1	1	0	0
	11	0	0	0	0
	10	1	0	0	1

Mappe e forma canonica

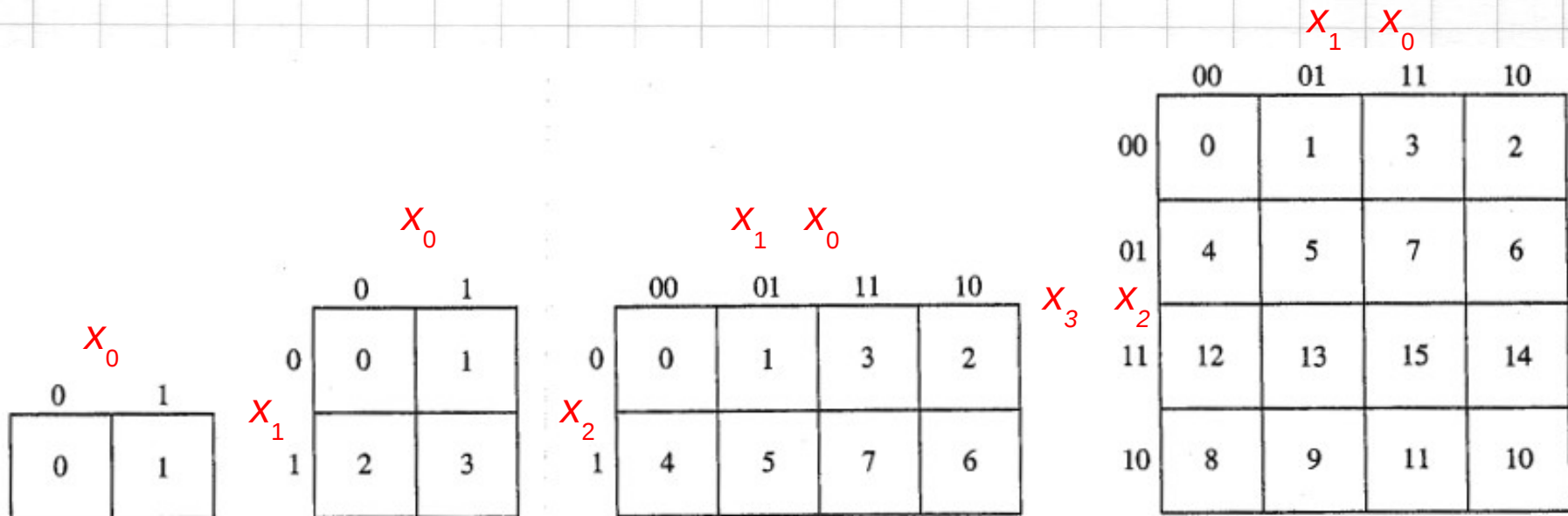
- Ogni 1 della mappa corrisponde a un mintermine
 - Per costruire il mintermine prendiamo la variabile se nell'indirizzo di cella la variabile vale 1, altrimenti prendiamo la variabile negata
- Ogni 0 della mappa corrisponde a un Maxtermine
 - Per costruire il Maxtermine prendiamo la variabile se nell'indirizzo di cella la variabile vale 0, altrimenti sommiamo la variabile negata

Esempio di min_ e Max_termini

		yz				
		00	01	11	10	
wx	00	1	1	0	1	$\bar{w} \bar{x} y \bar{z}$
	01	1	1	0	0	$w + \bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$
	11	0	0	0	0	$\bar{w} + \bar{x} + y + z$
	10	1	0	0	1	$w \bar{x} y \bar{z}$

Mappe e notazione decimale

- Attribueno agli ingressi il valore di cifre binarie, ogni cella della mappa viene ad avere un indirizzo costituito da un numero intero
- Utile per le funzioni il cui valore logiche ha a che fare con proprietà matematiche

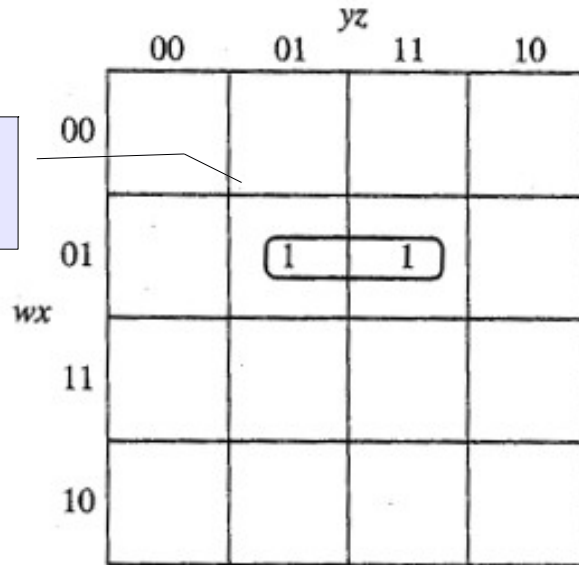


Mappe, implicanti e implicati

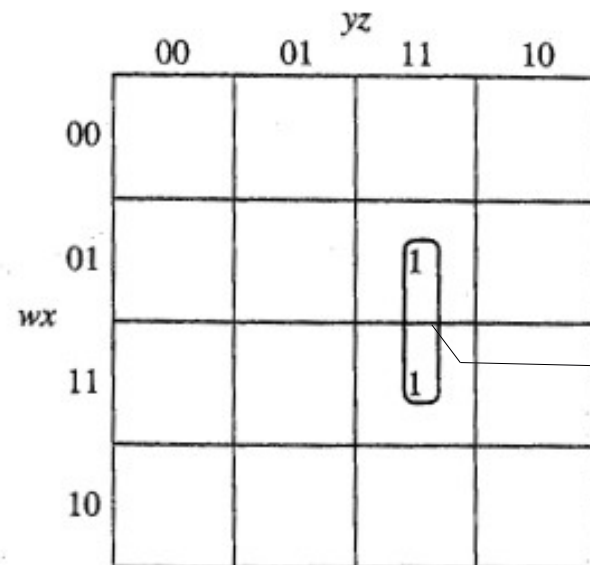
- Ogni raggruppamento rettangolare di 1 della mappa, con i lati pari a potenze di 2 ($2^a \times 2^b$), corrisponde a un implicante di ordine $(a + b)$
 - Si definisce sottocubo
 - Si ricordi che anche le celle estreme sono tra loro adiacenti
 - Per descrivere l'implicante si assumono le variabili affermate in corrispondenza al valore 1, le variabili negate in corrispondenza al valore 0
- Ogni raggruppamento rettangolare di 0 della mappa, ... , corrisponde a un implicato ...
 - Si ragioni in modo duale

Implicanti di ordine 1: esempi

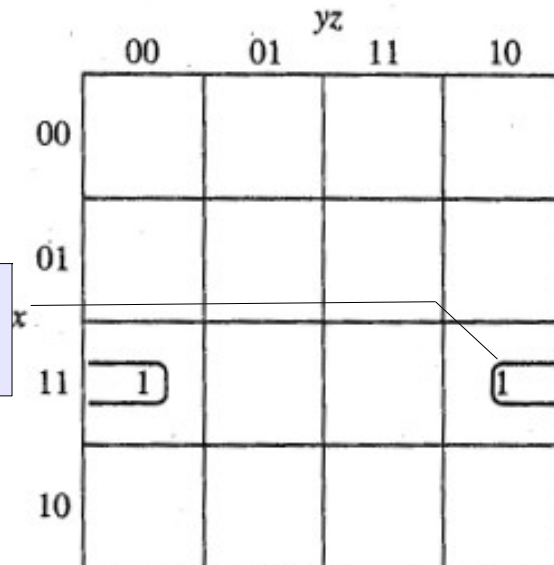
$\overline{w} x z$



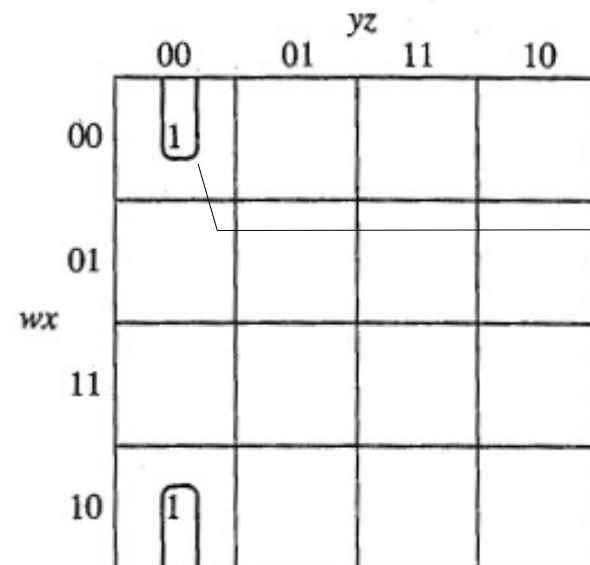
$x y z$



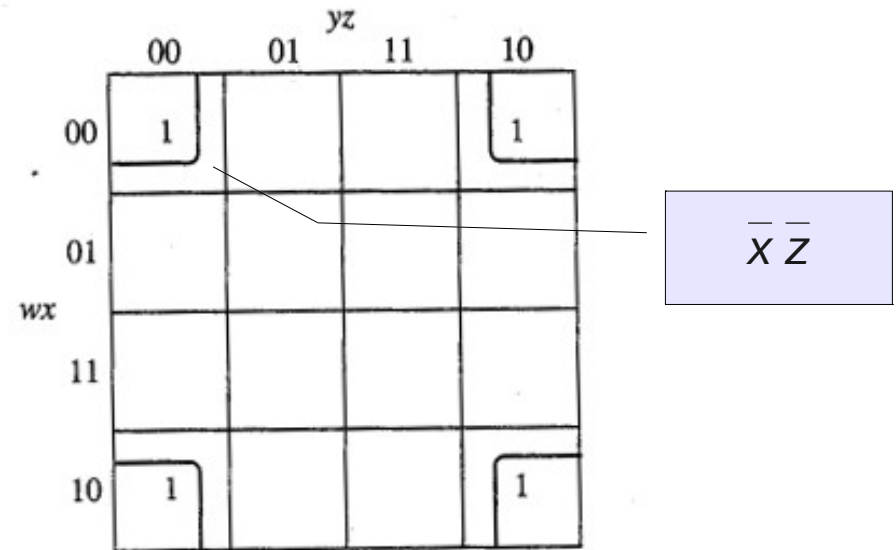
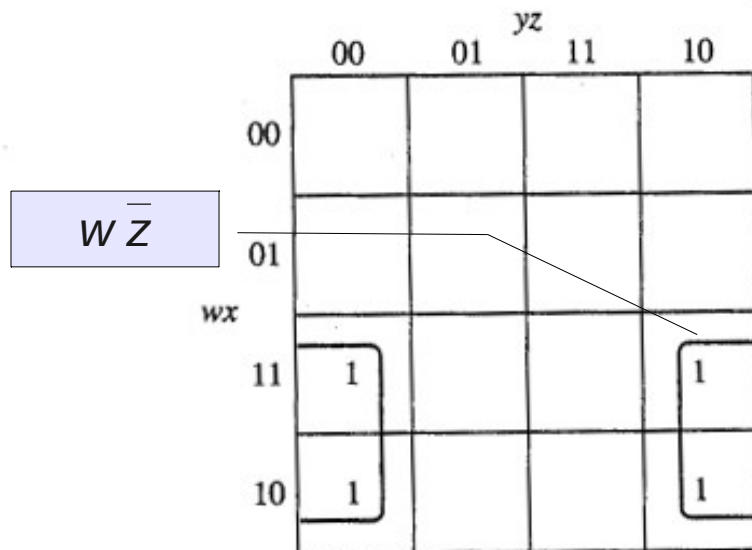
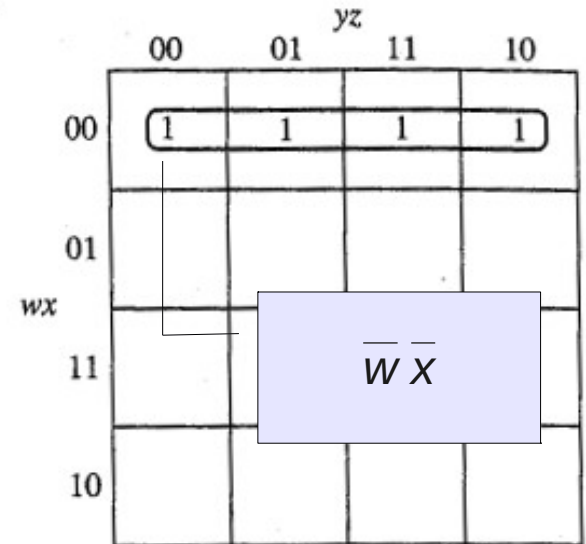
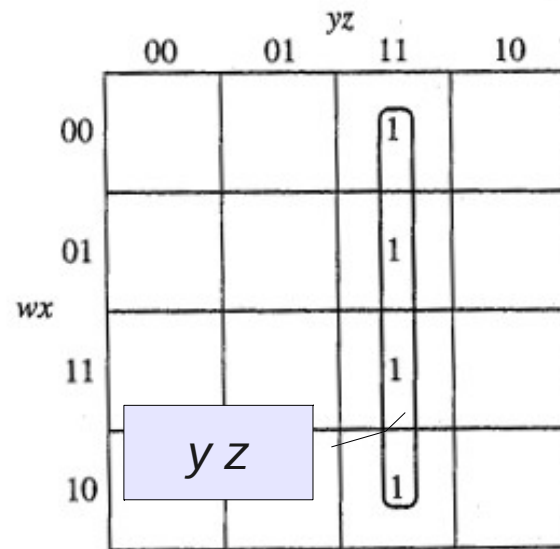
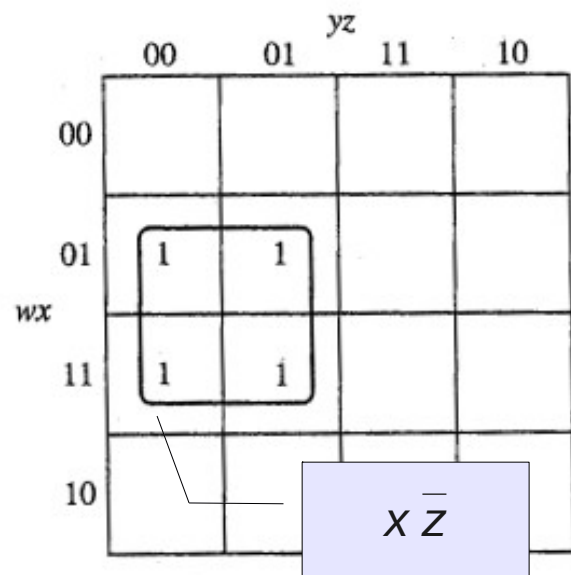
$w x \overline{z}$



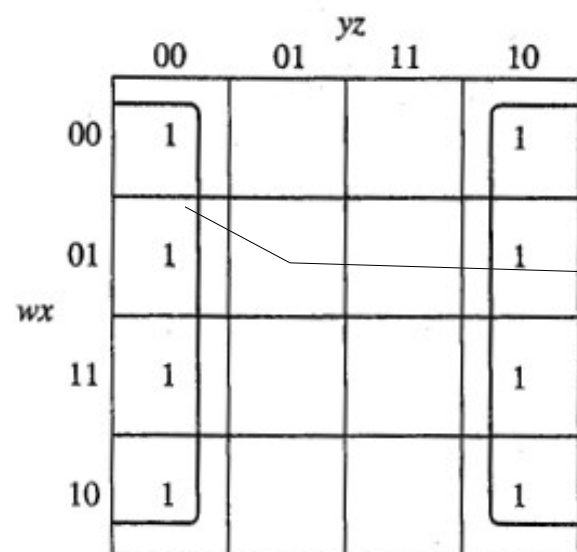
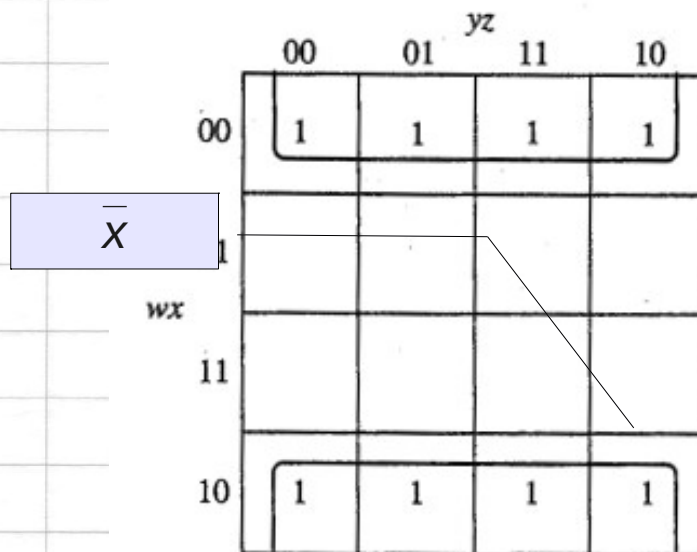
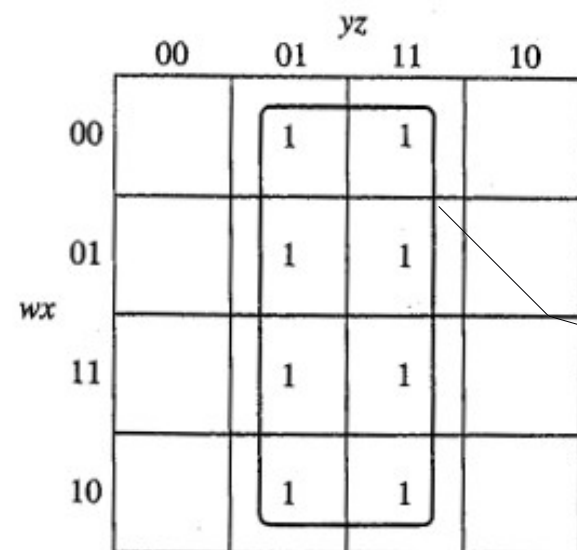
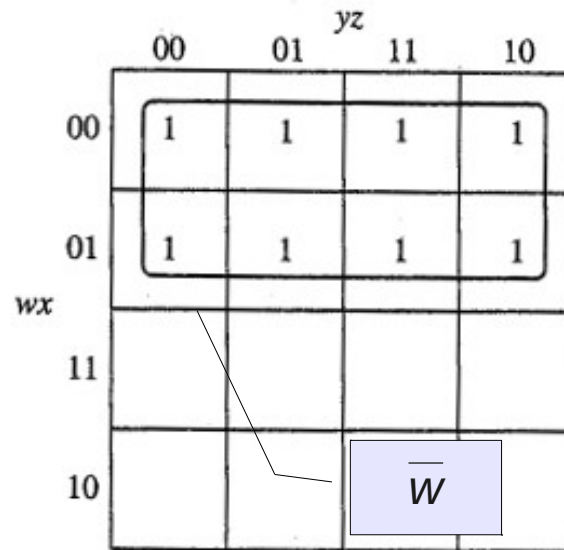
$\overline{x} \overline{y} \overline{z}$



Implicanti di ordine 2: esempi



Implicanti di ordine 3: esempi



Implicati: esempi

$\bar{y}$

	00	01	11	10
00				
01	0	0		
11				
10				

	00	01	11	10
00	0	0		
01				
11				
10	0	0		

	00	01	11	10
00			0	0
01			0	0
11			0	0
10			0	0

$w + \bar{x} + y$

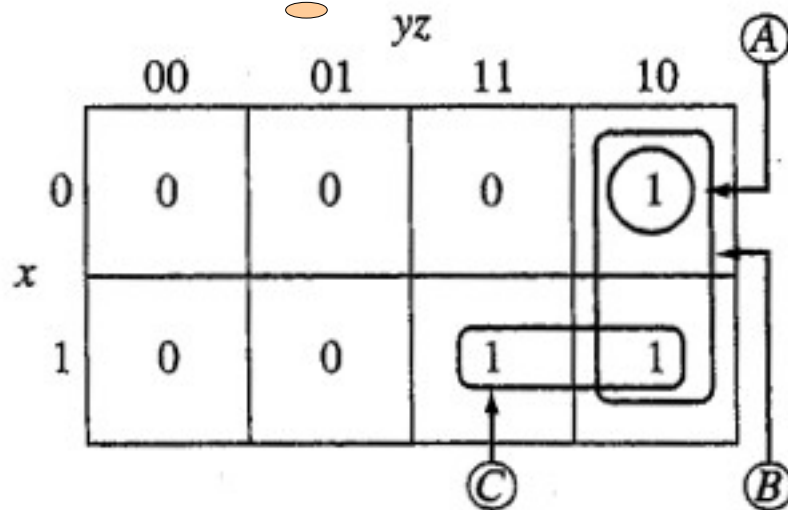
$x + y$

Mappe e sintesi ottima

- Sulla mappa è facile individuare gli implicant
- E capire se sono implicant principali

$$f = xy + y\bar{z}$$

Nota: la forma PS minima $f = y(x + \bar{z})$ ha meno letterali della SP



A Mintermine:
sottocubo in B

B e C implicanti
principali

Mappe e sintesi ottima (2)

- Cercare tutti i sottocubi non inclusi in sottocubi di dimensioni maggiori
 - Si parte dalla massima dimensione possibile: sottocubi di ordine n
 - Corrispondono agli implicanti principali
- Individuare gli implicanti principali essenziali
 - Sono quelli che includono mintermini non coperti da alcun altro implicante principale
 - Appartengono a tutte le possibili liste di copertura irridondanti
 - Sono quindi necessari in qualsiasi forma ottima

Mappe e sintesi ottima (3)

- Se l'insieme di tutti gli implicant principali essenziali copre la funzione, si ha la forma ottima
- Altrimenti occorre aggiungere altri sottocubi principali fino a coprire tutti gli uni della funzione
 - Si parte da quelli con maggiori dimensioni
 - Si può avere un numero finito di possibilità tra le quali scegliere la forma ottima

Dalla funzione alla mappa

- Se la funzione è specificata da un'espressione booleana, per arrivare alla mappa non è necessario valutare la tabella di verità
 - Convieniente riportare la funzione in una delle forme normali e tradurre i termini in sottocubi
 - Insiemi di 1 nella forma SP, o 0 forma PS

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	0	0	0	0
	01	1	1	0	0
	11	1	1	1	0
	10	0	0	1	0

$$f(w,x,y,z) = x\bar{y} + wxz + w\bar{x}yz$$

Esempi (1)

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	1	1	0	1
	01	1	1	1	0
	11	1	0	0	0
	10	0	1	0	0

Implicante
essenziale

Implicante
essenziale

Implicante
essenziale

Implicante
essenziale

Esempi (2)

$$f(w,x,y,z) = \bar{w}\bar{x} + \bar{w}xz + yz$$

	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	1	1	0
11	0	0	1	0
10	0	0	1	0

	00	01	11	10
00	*1	1	1	*1
01	0	*1	1	0
11	0	0	*1	0
10	0	0	*1	0

Ottimizzare una funzione specificata tramite espressione logica

$$f = \bar{w}\bar{x} + \bar{w}xz + yz$$

Esempi (3)

	yz			
	00	01	11	10
00	*1	0	0	*1
01	1	0	1	1
11	1	1	1	0
10	0	*1	0	0

Implicante
essenziale

Modi diversi per
coprire la funzione

Implicante
essenziale

Esempi (4)

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	0	*1	1	0
	01	*1	1	1	1
	11	0	0	1	*1
	10	0	0	*1	0

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	*0	1	1	*0
	01	1	1	1	1
	11	*0	*0	1	1
	10	0	*0	1	*0

Sintesi SP e PS a confronto

$$f = \overline{w}x + \overline{x}z + yz + xy$$

$$f = (x + z)(\overline{w} + y)$$

Sintesi di funzioni incomplete

- Nella mappa sono contenuti 0, 1 e -
- Il concetto è quello di usare le celle non specificate per ottenere implicanti (implicati) di ordine maggiore
- Una volta coperti tutti gli “1” effettivi della funzione, alcuni “-” possono risultare non coperti
 - La funzione effettivamente sintetizzata costituita dalla somma degli implicanti selezionati

Somma minima con “don't care”

- Si determinano tutti gli implicant principali considerando i “-” come “1”
- Si esaminano le coperture irridondanti di implicant principali
 - Si coprono solo gli “1” effettivi della funzione
 - Si parte dagli implicant essenziali
 - Tenendo conto solo degli 1 effettivi

Esempio

Implicante inutile perché fatto solo di “-”

Implicante essenziale

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	(1)	(1)	*1	0
	01	0	-	*1	0
	11	1	-	0	-
	10	(1)	0	0	-

Di questi 2 implicanti basta sceglierne uno

Implicante inutile perché l'unico “1” reale è già coperto da implicante di ordine maggiore

Mappe a 5 variabili (1)

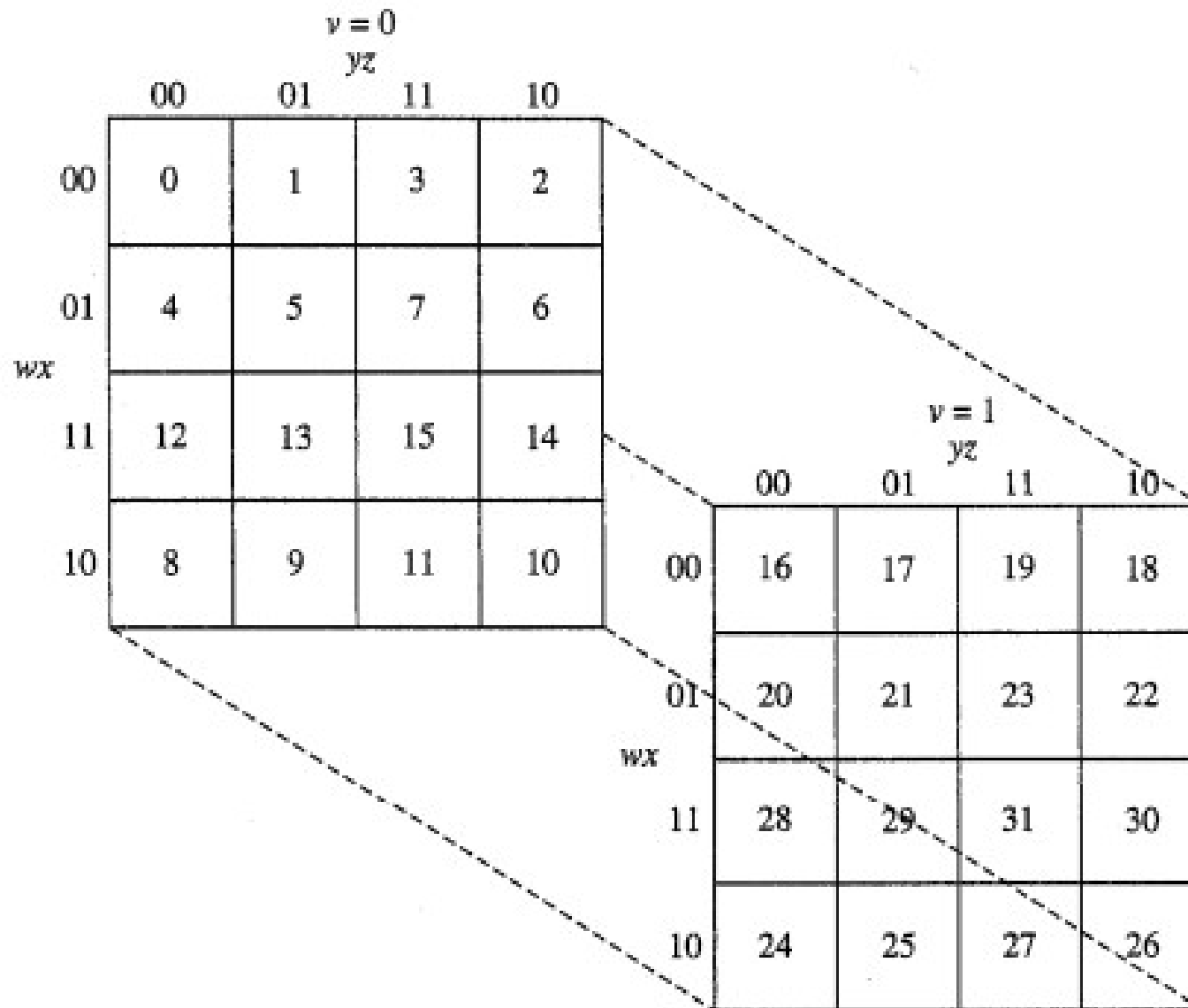
- La sintesi tramite mappe può effettuarsi anche per 5 variabili
 - Con l'uso della **simmetria speculare**
 - Rispetto a un asse verticale
 - Con la **sovrapposizione** di 2 piani da 4 variabili
 - Secondo il valore della quinta variabile 0, 1
- Si possono formare implicant in modi diversi
 - Sulle singole mappe
 - Con $x_5 = 0$ nei termini prodotto ci sarà $\bar{x}_5$
 - Con $x_5 = 1$ nei termini prodotto ci sarà x_5
 - A cavallo delle due mappe in posti corrispondenti
 - Nel termine non apparirà x_5

Mappe a 5 variabili (2)

		xyz							
		000	001	011	010	110	111	101	100
vw	00	0	1	3	2	6	7	5	4
	01	8	9	11	10	14	15	13	12
	11	24	25	27	26	30	31	29	28
	10	16	17	19	18	22	23	21	20

(a)

Mappe a 5 variabili (3)



(b)

Esempio SP a 5 variabili

		xyz							
		000	001	011	010	110	111	101	100
vw	00	1	1	1	1	*1	1	0	0
	01	0	0	*1	0	0	*1	0	0
	11	0	0	*1	0	0	*1	0	0
	10	*1	1	1	0	0	*1	0	0

Esempio PS a 5 variabili

		xyz							
		000	001	011	010	110	111	101	100
vw	00	1	1	1	1	1	1	*0	*0
	01	0	*0	1	*0	*0	1	0	0
	11	0	*0	1	0	0	1	0	0
	10	1	1	1	*0	0	1	*0	0

Mappe a 6 variabili (1)

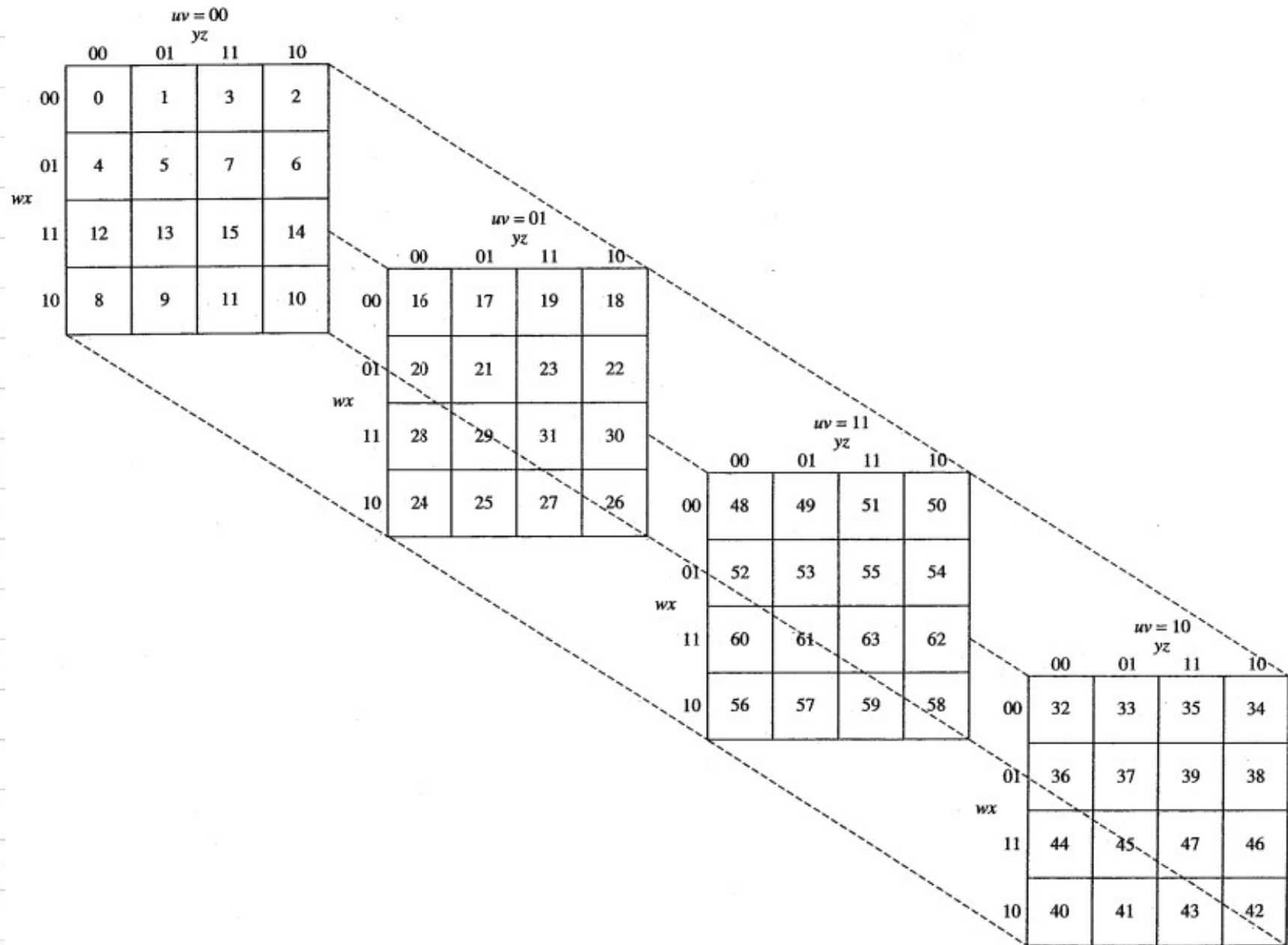
- La sintesi tramite mappe può spingersi al massimo fino a 6 variabili
 - Con l'uso della **simmetria speculare**
 - Sui due assi orizzontale e verticale
 - Con la **sovrapposizione** di 4 piani da 4 variabili
 - Secondo le sequenze di combinazioni 00, 01, 11, 10
- Oltre le 6 variabili (già impegnative da gestire con le mappe) si usano **metodi algoritmici**
 - Algoritmo di Quine-McCluskey
 - Problema *NP* completo
 - Per reti di grande complessità si usano metodi euristici

Mappe a 6 variabili (2)

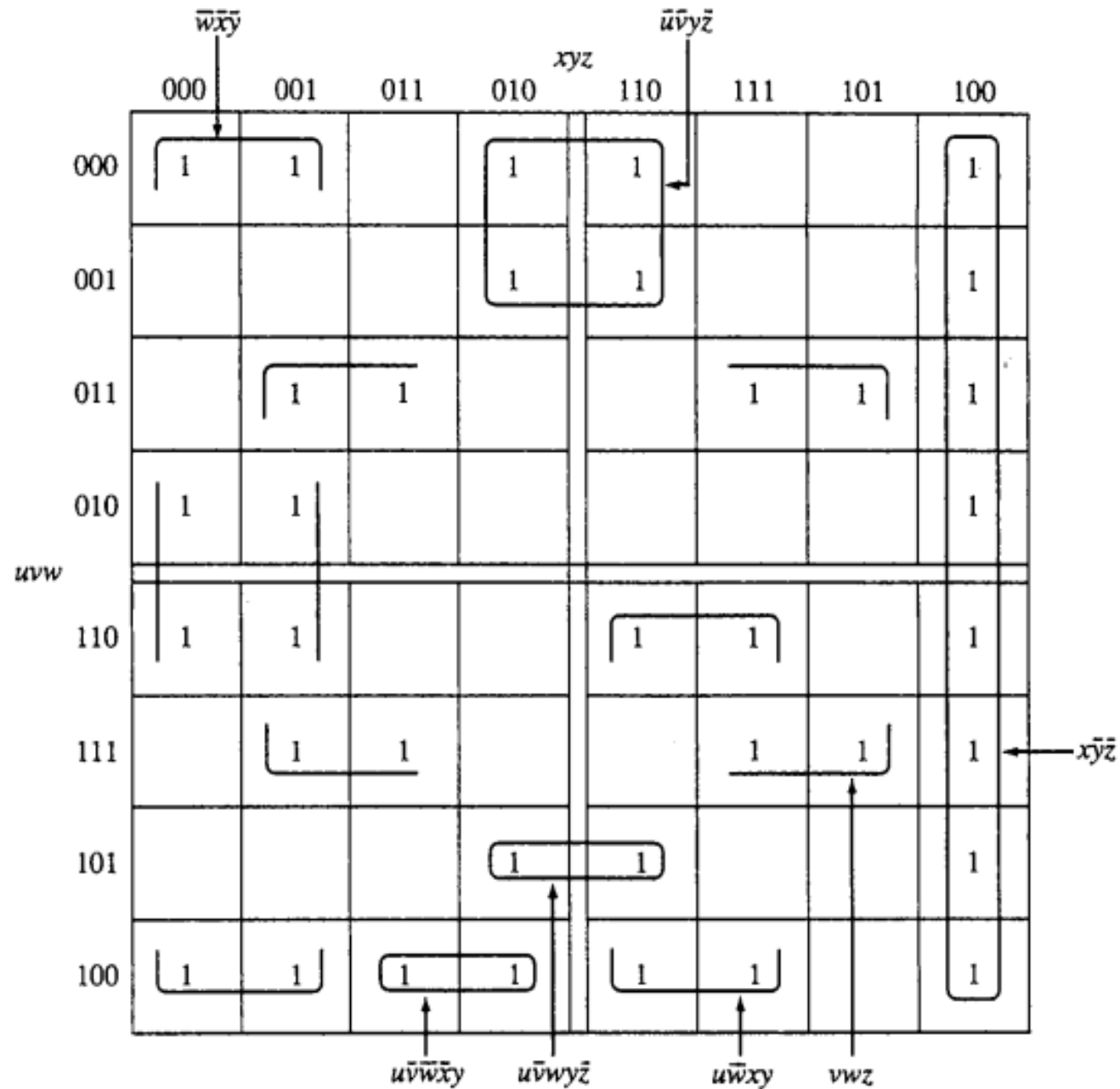
		xyz							
		000	001	011	010	110	111	101	100
uvw	000	0	1	3	2	6	7	5	4
	001	8	9	11	10	14	15	13	12
	011	24	25	27	26	30	31	29	28
	010	16	17	19	18	22	23	21	20
	110	48	49	51	50	54	55	53	52
	111	56	57	59	58	62	63	61	60
	101	40	41	43	42	46	47	45	44
	100	32	33	35	34	38	39	37	36

(a)

Mappe a 6 variabili (3)



Esempio a 6 variabili

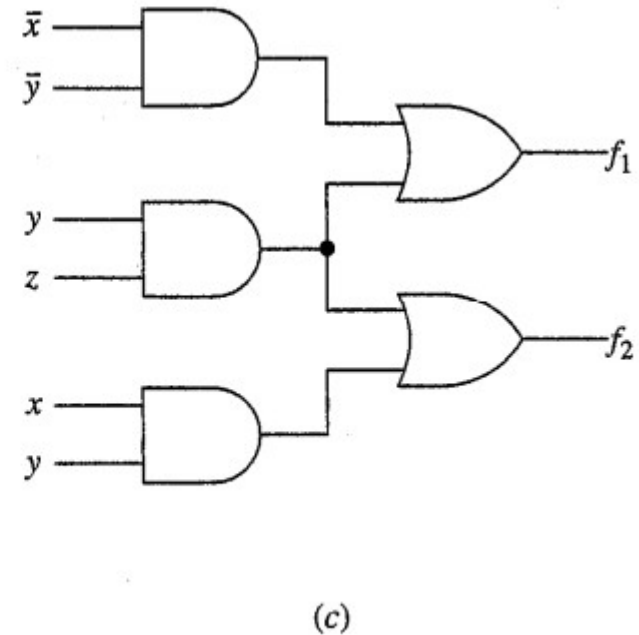
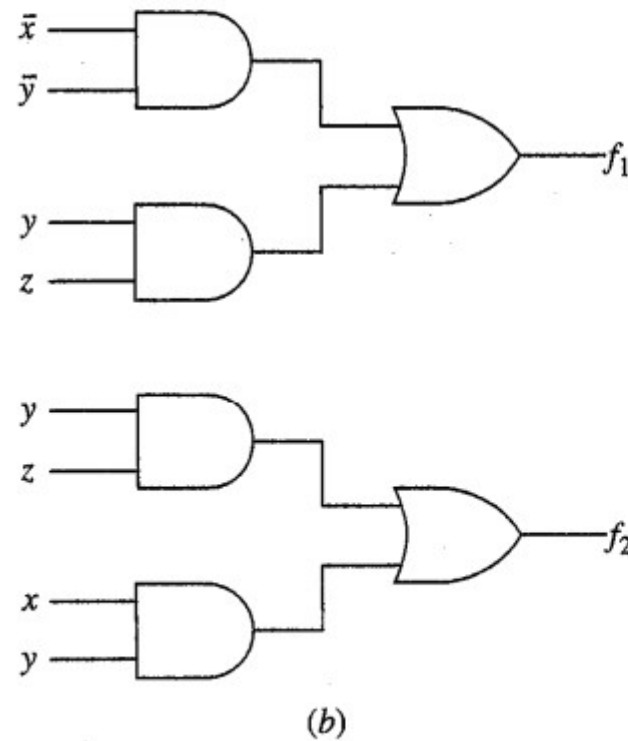


Funzioni a più uscite

(a)

		yz			
		00	01	11	10
x	0	1	1	1	0
	1	0	0	1	0

		yz			
		00	01	11	10
x	0	0	0	1	0
	1	0	0	1	1



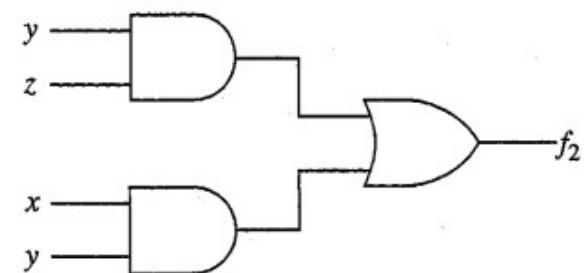
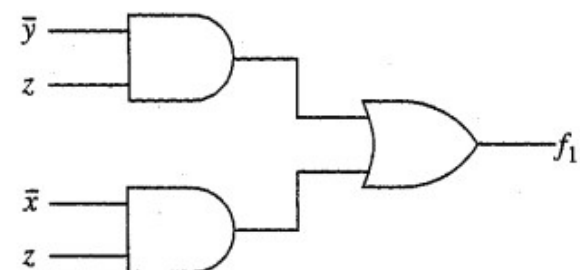
Funzioni a più uscite (2)

f_1

		yz			
		00	01	11	10
x	0	0	1	1	0
	1	0	1	0	0

f_2

		yz			
		00	01	11	10
x	0	0	0	1	0
	1	0	0	1	1



f_1

		yz			
		00	01	11	10
x	0	0	1	1	0
	1	0	1	0	0

f_2

		yz			
		00	01	11	10
x	0	0	0	1	0
	1	0	0	1	1

